Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Текст 4.1

Аннотация

Типы множеств в n-мерном пространстве. Дифференциал функции нескольких переменных. Частные производные высших порядков.

1 Типы множеств

Определение

Совокупность всех точек $x \in R^n$ таких, что $\rho(x, a) < \varepsilon$, называется **n-мерным шаром** с центром в точке a и радиуса ε или **ε-окрестностью** точки a.

Обозначение: $U(a, \varepsilon) = \{x|\rho(x, a) < \varepsilon\}$.

Определение

Пусть дано множество $X \subset R^n$. Точка $x \in X$ называется **внутренней точкой** этого множества, если $\exists U(x, \varepsilon) \subset X$.

Определение

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой, называется **открытым**.

Определение

Точка x называется **точкой прикосновения** множества X, если в $\forall U(x, \varepsilon)$ содержится хотя бы одна точка множества X.

Определение

Совокупность всех точек прикосновения множества X называется **замыканием** множества X и обозначается: $\overline{X}$.

Определение

Множество X называется **замкнутым**, если $X = \overline{X}$.

Определение

Точка x называется **граничной точкой** множества X, если $\forall U(x, \varepsilon)$ содержит точки как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему.

Определение

Множество всех граничных точек множества X называется **границей** множества X и обозначается ∂X.

Определение

Множество X называется **ограниченным**, если существует некоторый n-мерный шар $U(O, \varepsilon)$ с центром в начале координат $O = (0, 0, ..., 0)$ такой, что $X \subset U(O, \varepsilon)$.

Определение

Множество X называется **компактом**, если оно замкнуто и ограничено.

Определение

Множество X называется **линейно связным**, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить линией, целиком лежащей в X.

Определение

Открытое линейно связное множество называется **областью**.

Определение

Замыкание области называется **замкнутой областью**.

Определение

Линейно связное множество X называется **односвязным**, если любую замкнутую кривую в этом множестве можно стянуть в точку, оставаясь внутри X. В противном случае X называется **многосвязным множеством**.

2 Дифференциал ФНП

Определение

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, то линейная функция $A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n$ переменных Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n называется **дифференциалом** или **полным дифференциалом** функции $f(x)$.

Обозначение: df

Используя необходимое условие дифференцируемости и введя обозначения $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$, дифференциал можно записать в виде:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной. Например, $d(f+g) = df + dg$, $d(c\cdot f) = c\cdot df$, где c - константа.

3 Частные производные высших порядков

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ называется **частной производной 2-ого порядка** по переменным x_i и x_j.

Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)'_{x_j}$.

Если $i = j$, то частная производная называется чистой и
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
Если $i \neq j$, то частная производная называется смешанной.

Теорема (о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования)

Пусть функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ имеет в окрестности точки $a = (a_1, ..., a_n)$ частные производные 1-ого и 2-ого порядков $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, причем частные производные 2-ого порядка непрерывны в точке a. Тогда $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, т.е. значения частных производных 2-ого порядка не зависят от последовательности переменных, по которым идет дифференцирование.

Определение

Частной производной n-ого порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-ого порядка.

Пример: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)'_{x_i}$.