Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0.

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1.

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда
$\Delta x = x_1 - x_0$

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда
$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1,

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда
$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1,
$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда

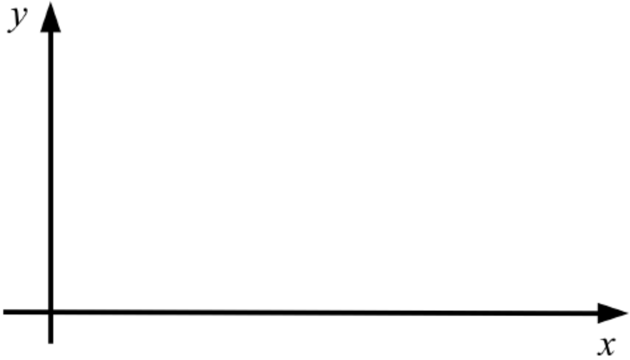
$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

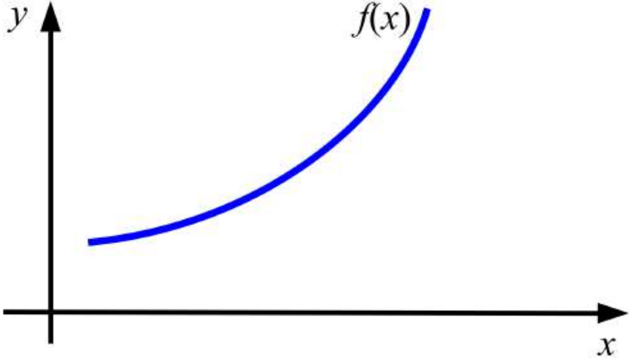
Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда
$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1,
$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

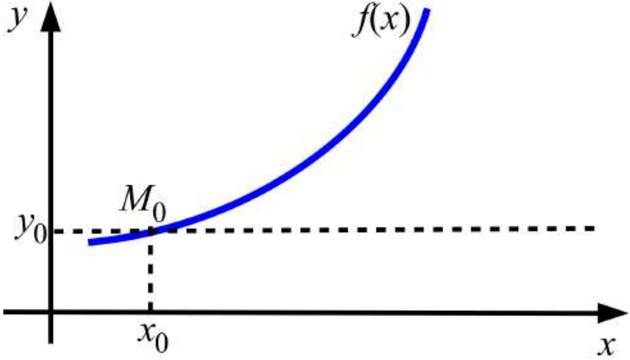
Производная



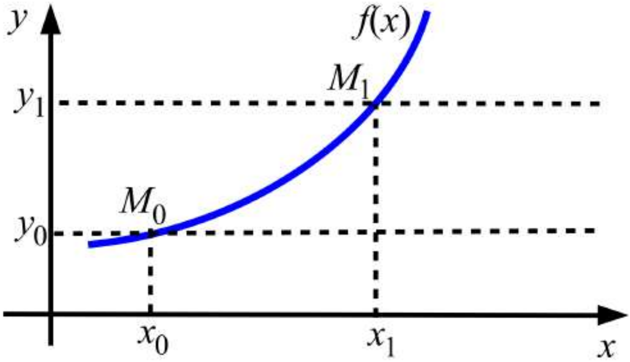
Производная



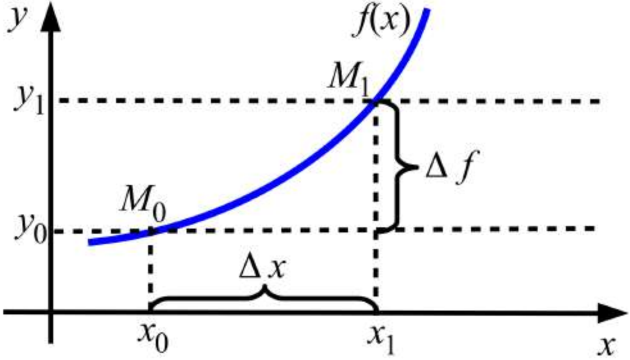
Производная



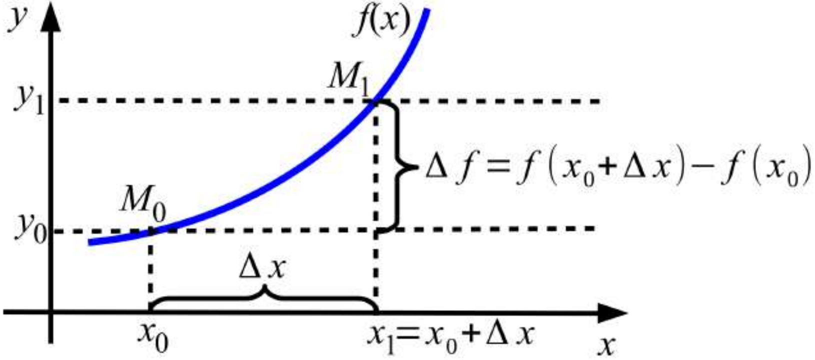
Производная



Производная



Производная



Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производная

Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Производная

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_{-}(x_0)$.

Определение
Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)
$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$

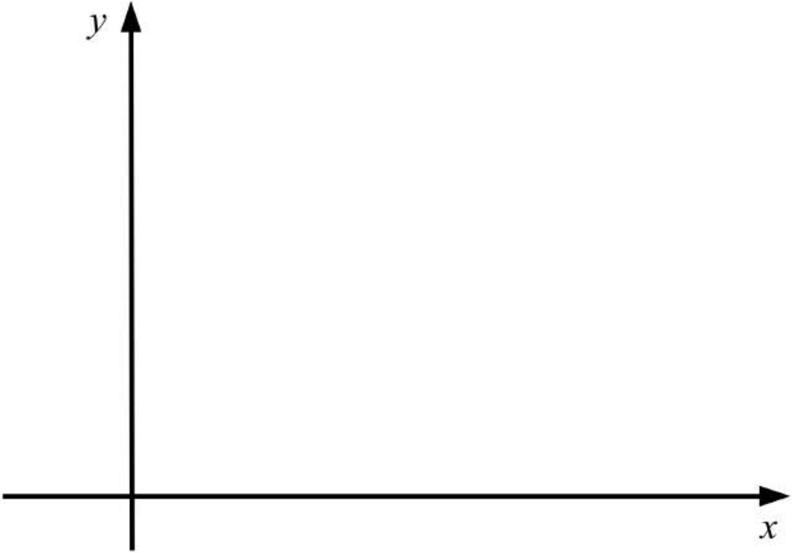
Производная

Определение

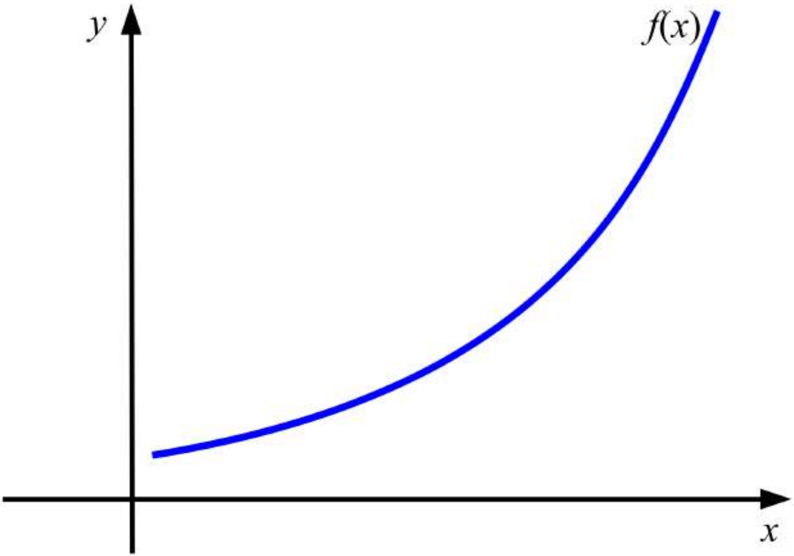
Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

Геометрический смысл производной

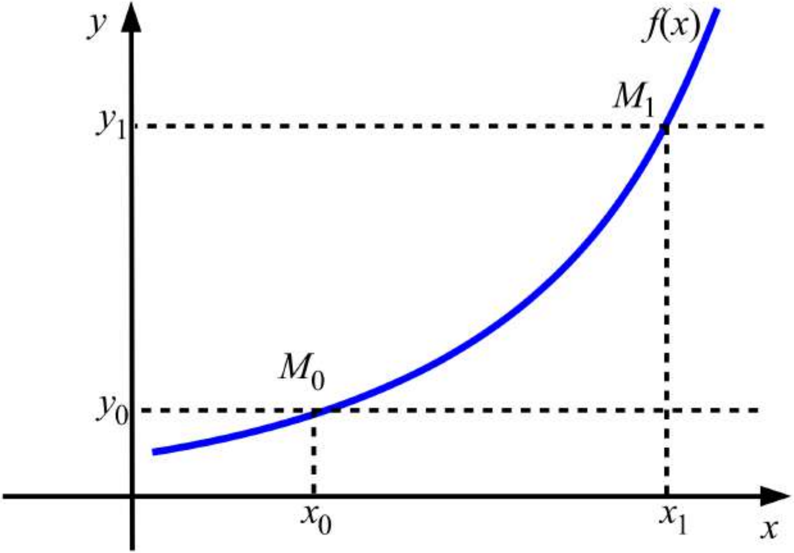
Геометрический смысл производной



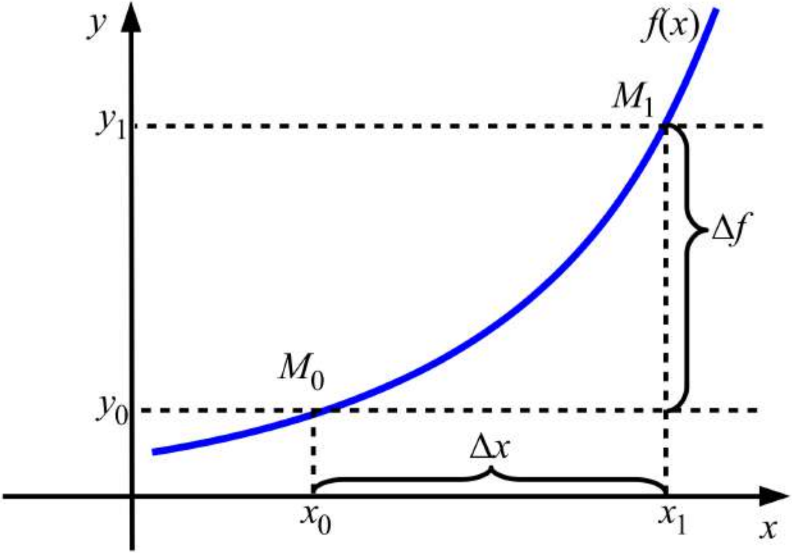
Геометрический смысл производной



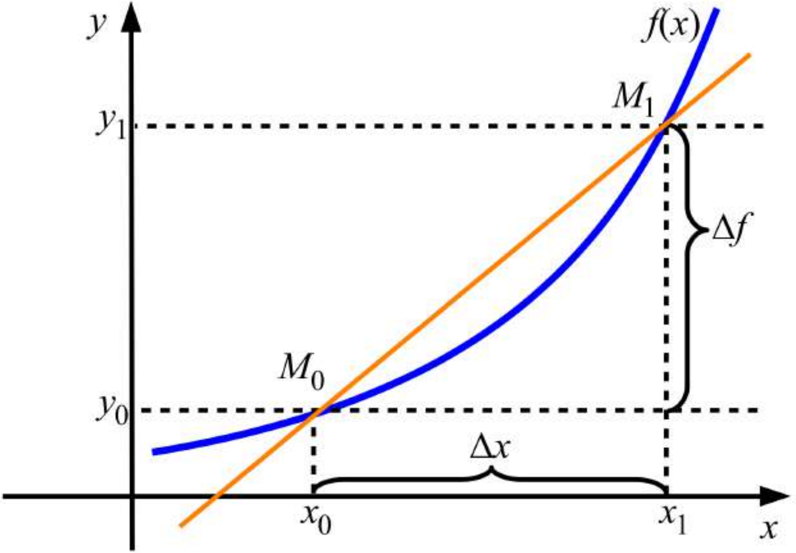
Геометрический смысл производной



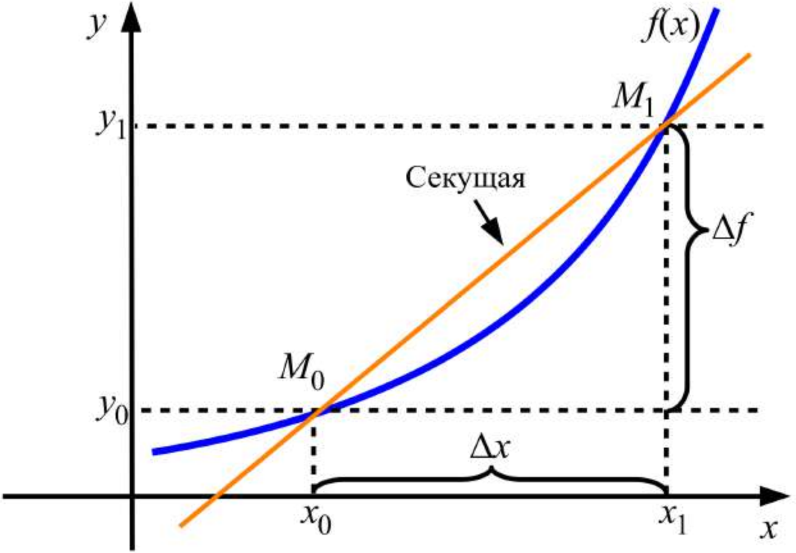
Геометрический смысл производной



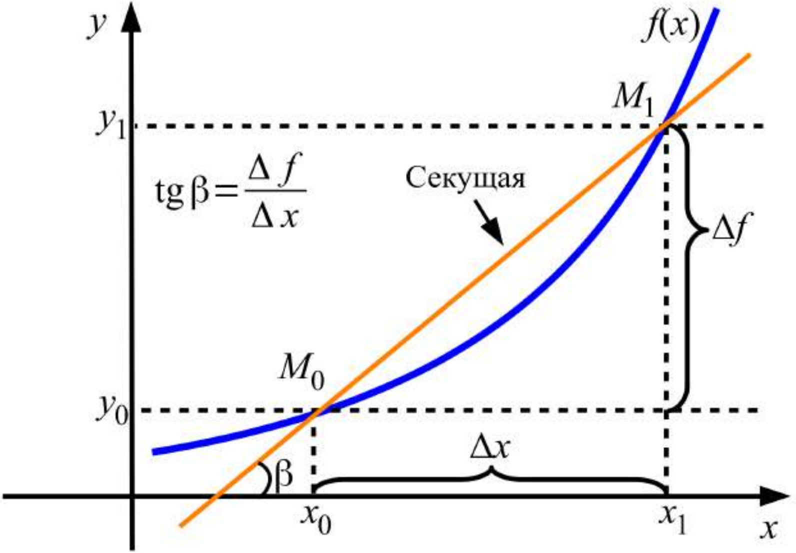
Геометрический смысл производной



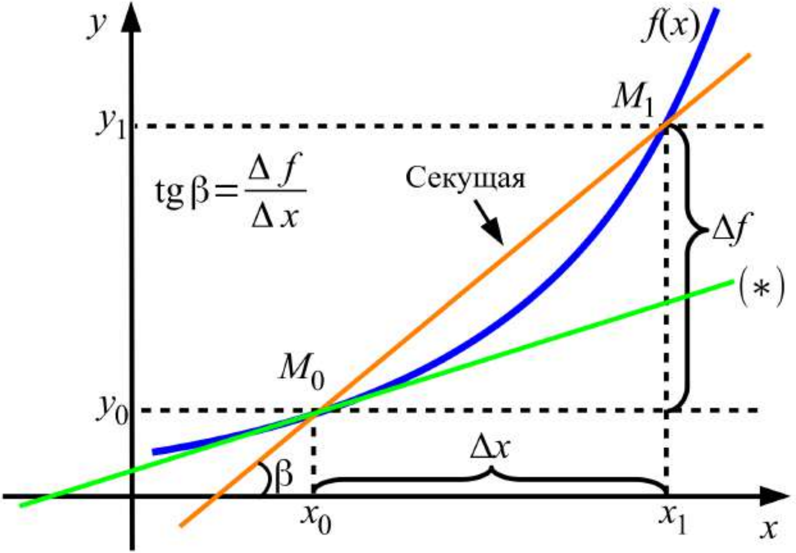
Геометрический смысл производной



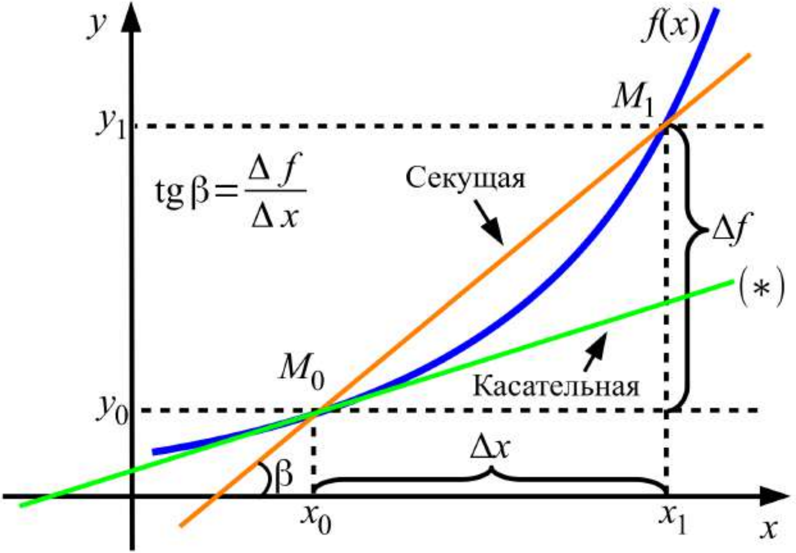
Геометрический смысл производной



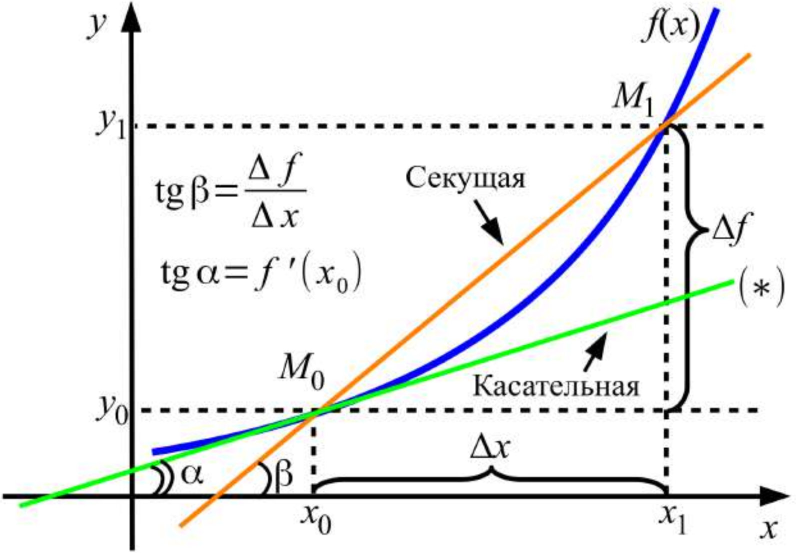
Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.
Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где
$y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую
M_0M_1 графика функции $y = f(x)$.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.
Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$. Устремив точку M_1 к точке M_0, мы переведем секущую M_0M_1 в прямую $(*)$, которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.

Геометрический смысл производной

Определение

Предельное положение секущей M_0M_1, когда $M_1 \to M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий

$$y_0 = kx_0 + b \text{ и } y_1 = kx_1 + b.$$

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий

$$y_0 = kx_0 + b \text{ и } y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.

Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Геометрический смысл производной

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1, то

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

По определению
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
Тогда
$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

Откуда следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

Дифференцируемость функции

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

Дифференцируемость функции

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)

Доказательство

1) необходимость $(\Rightarrow)$

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Доказать: $\exists f'(x_0)$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \quad : \Delta x$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \quad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \quad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

$$\Downarrow$$

$$\exists f'(x_0)$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

$$\Downarrow$$

$$\exists f'(x_0) = A.$$

2) достаточность ($\Leftarrow$)

Дифференцируемость функции

2) достаточность ($\Leftarrow$)
Дано: $\exists f'(x_0)$

Дифференцируемость функции

2) достаточность ($\Leftarrow$)
Дано: $\exists f'(x_0)$
Доказать: $f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

$\exists f'(x_0)$

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Дифференцируемость функции

$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Отсюда $\Delta f =$

Дифференцируемость функции

$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Отсюда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} =$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) =$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x) \in D(x_0).$$

$\blacksquare$

Дифференцируемость функции

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

Дифференцируемость функции

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство

Доказательство

$f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f =$$

Доказательство

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) =$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0$$

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

■

Дифференциал функции

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.
Обозначение: $df(x_0)$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$.

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx.

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) =$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.}$$

Дифференциал функции

Пример:

Пример:
$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

Дифференциал функции

Пример:

$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$

Дифференциал функции

Пример:

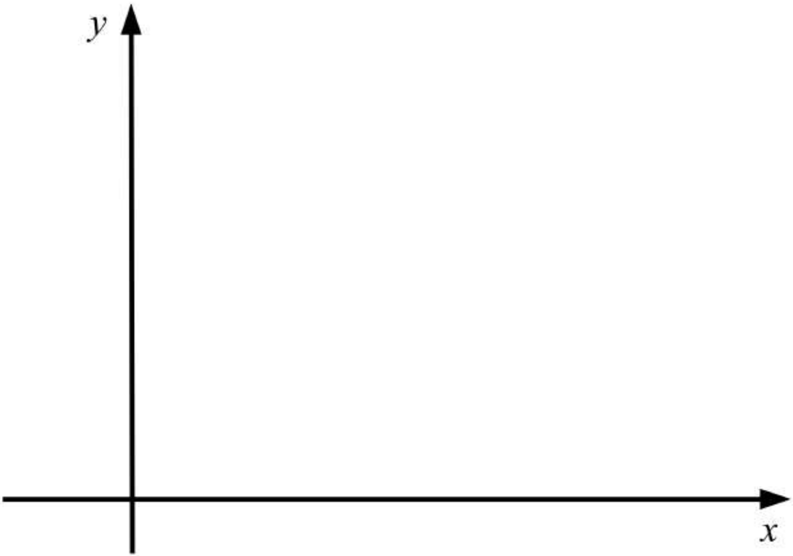
$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$

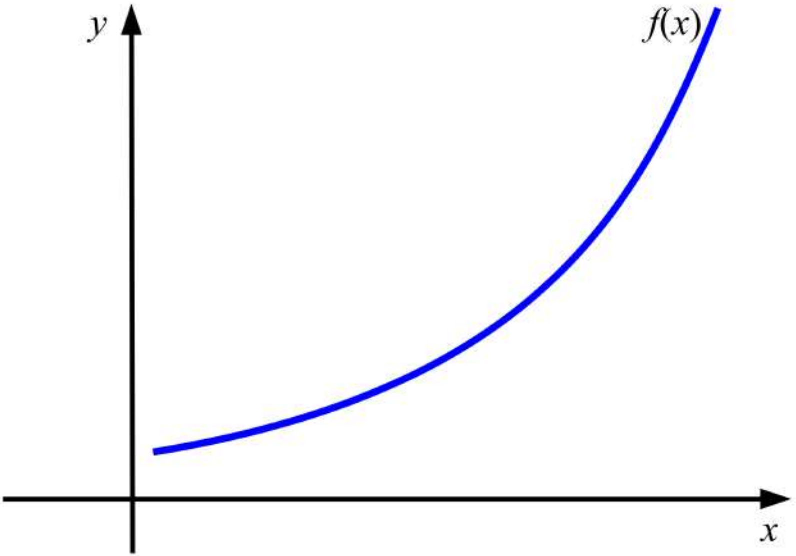
$\Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$

Геометрический смысл дифференциала

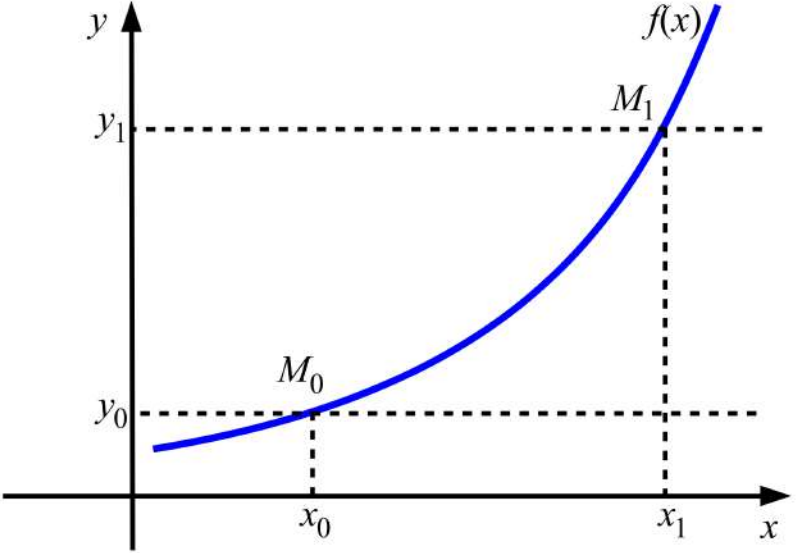
Геометрический смысл дифференциала



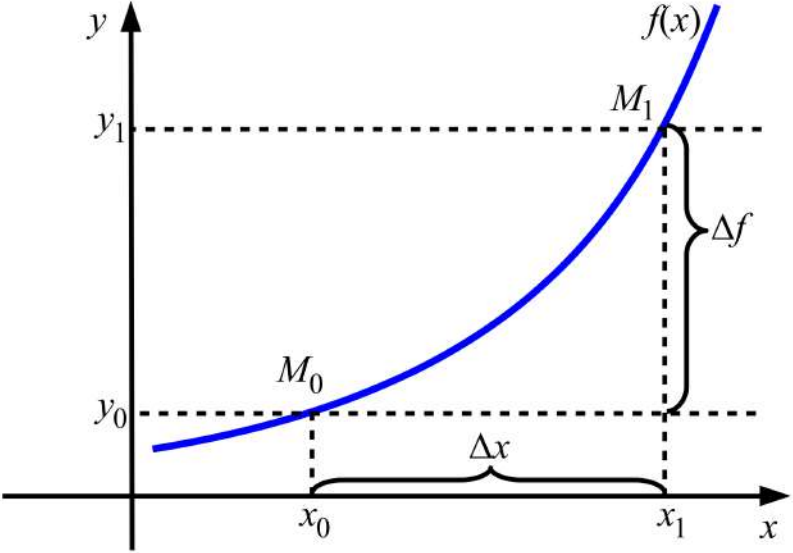
Геометрический смысл дифференциала



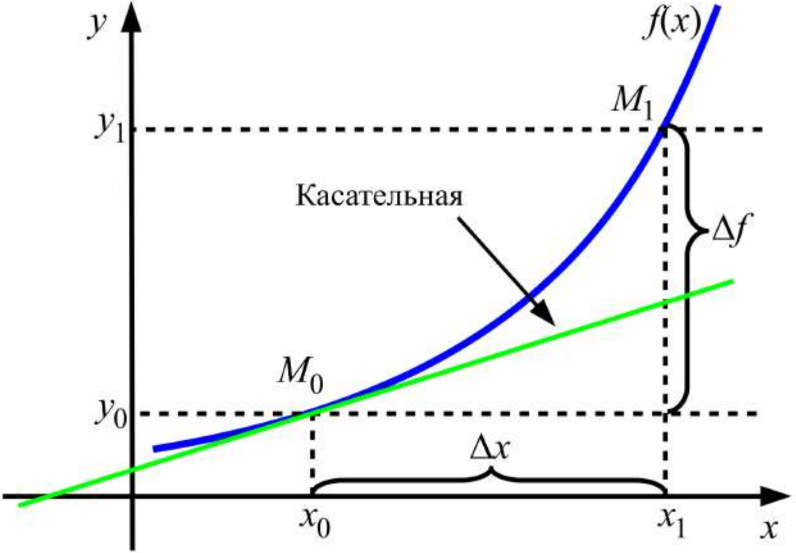
Геометрический смысл дифференциала



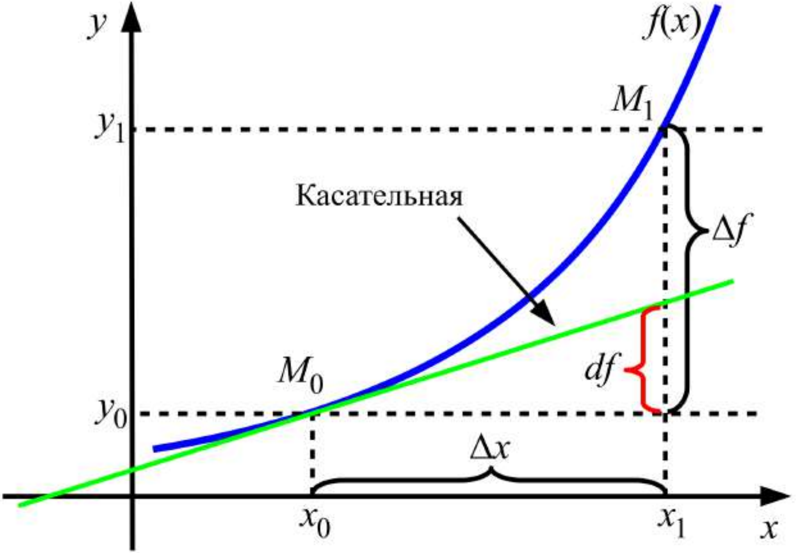
Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx.

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} =$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

Геометрический смысл дифференциала

Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{df} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

то, чем меньше приращение аргумента Δx, тем ближе значение дифференциала к значению приращения функции.

Инвариантность формы дифференциала

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$u_0 = u(x_0)$

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$u_0 = u(x_0)$

$df(x_0) = f'(x_0)dx$

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)u'(x_0)dx$$

Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,

u - промежуточная переменная,

x - независимая переменная,

$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)u'(x_0)dx = v'(u_0)du$$

Инвариантность формы дифференциала

Дифференциал df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной u) он считается.