Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 3.3

Аннотация

Формула Тейлора. Формула Маклорена. Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора. Монотонные функции. Экстремум функции.

1 Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + ... + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n.$$

Свойство многочлена Тейлора

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е. $P_n(c) = f(c)$, $P_n'(c) = f'(c)$, ..., $P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$.

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + ... + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n = f(c).$$

$$P_n'(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x-c) + ... + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}.$$

$P_n'(c) = f'(c)$.

Аналогично для остальных производных. ■

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n-ого порядка**

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + ... + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n,$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

2) форма Лагранжа

$r_n = \dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))(x-c)^{n+1}, 0 < \theta < 1$

2 Формула Маклорена

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + ... + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \circ(x^n), x \to 0.$$

3 Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n, а $r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$ - остаточный член формулы Тейлора.

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c, тем точнее данная формула.

Пример:

$\sin\dfrac{\pi}{6} = 0.5, \dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \dfrac{x^3}{3!}, \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.4997.$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}, \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.500003.$

4 Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

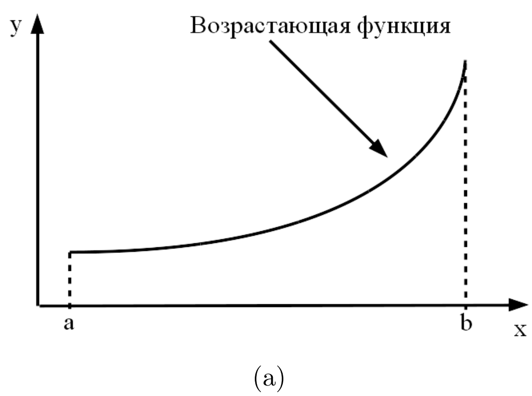
Определение

Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей (строго убывающей)** на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение

Возрастающие и убывающие функции также называются **монотонными**.

Примеры монотонных функций приведены на рис. 1.



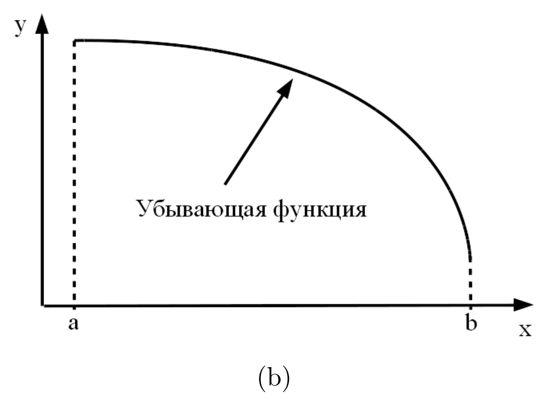


Рис. 1: Возрастающая (a) и убывающая (b) функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$.

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производную $f'(x)$.

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$.

© Семакин А.Н., 2017

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Пусть $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \in D(a,b)$. Если $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), то на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ возрастает (убывает).

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2)$.

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$.

Если $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, $f(x_2) \geq f(x_1)$ - $f(x)$ возрастает.

Если $f'(c) \leq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, $f(x_2) \leq f(x_1)$ - $f(x)$ убывает.

■

5 Экстремум функции

Определение

Точка c называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если $f'(c) = 0$.

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $f(x)$, если $f'(c)$ равен нулю или не существует.

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если существует некоторая окрестность этой точки $U(c)$ такая, что $\forall x \in U(c)$ $f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$).

Определение

Точки локального максимума и минимума также называются **точками экстремума**.

Определение

Значение функции $f(x)$ в точке локального максимума (минимума) называется **локальным максимумом (минимумом)** или **экстремумом функции**.

На рис. 2 приведены примеры точек экстремума произвольной функции. Здесь x_{min}^1, x_{min}^2 - точки локального минимума, x_{max}^1, x_{max}^2 - точки локального максимума.

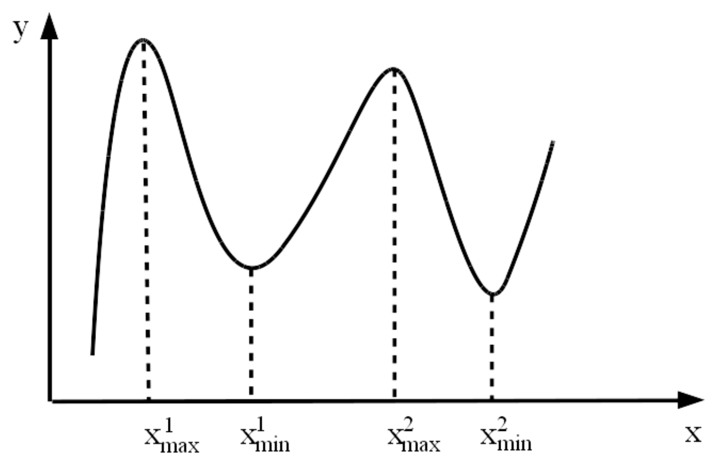


Рис. 2: Точки экстремума