Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 3.1

Аннотация

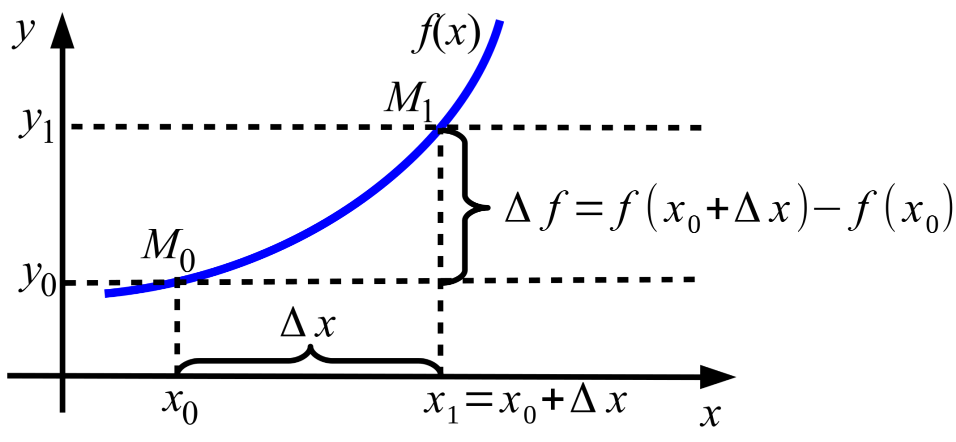
Производная функции, ее геометрический смысл. Односторонние производные, их связь с двусторонней производной. Дифференцируемость функции. Свойства дифференцируемых функций. Дифференциал функции, его геометрический смысл и инвариантность формы.

1 Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x при переходе от точки x_0 к точке x_1,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0.



© Семакин А.Н., 2017

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$

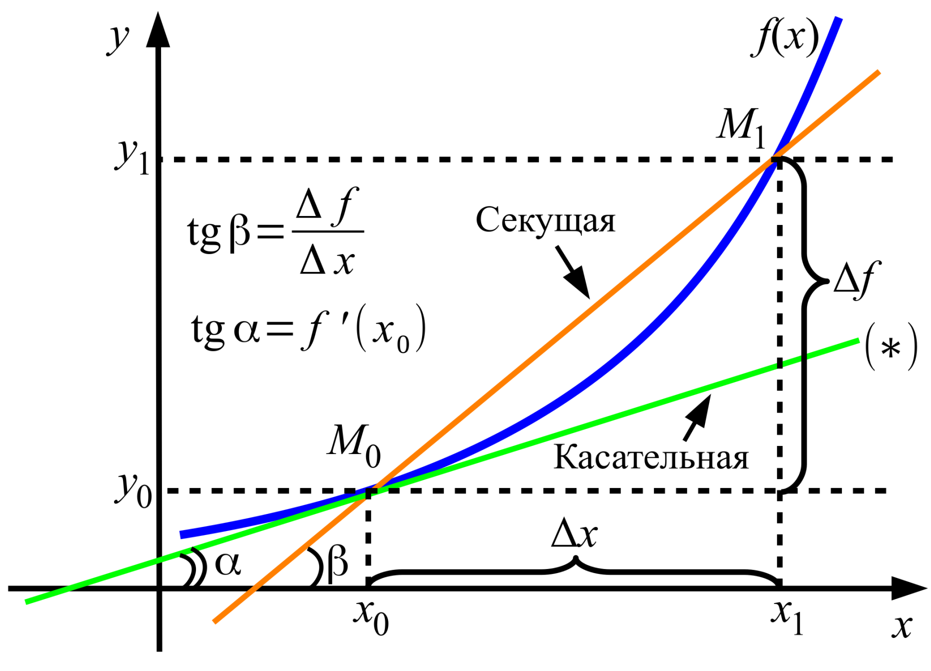
Определение

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

2 Геометрический смысл производной

Пусть $f(x) \in C(x_0)$, $f'(x_0) \neq \infty$.

Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$ (см. рисунок ниже). Устремив точку M_1 к точке M_0, мы переведем секущую M_0M_1 в прямую $(*)$, которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.



Определение

Предельное положение секущей M_0M_1, когда $M_1 \to M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Коэффициенты уравнения $y = kx + b$ секущей M_0M_1 находим из условий $y_0 = kx_0 + b$ и $y_1 = kx_1 + b$. Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right)(x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Откуда следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

3 Дифференцируемость функции

Определение

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство

1) необходимость ($\Rightarrow$)

Дано: $f(x) \in D(x_0)$

Доказать: $\exists f'(x_0)$

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow \exists f'(x_0) = A.$$

2) достаточность ($\Leftarrow$)

Дано: $\exists f'(x_0)$

Доказать: $f(x) \in D(x_0)$

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой
$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.
Отсюда $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$
$\Rightarrow \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\Rightarrow f(x) \in D(x_0)$.
■

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство
$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in C(x_0)$.
■

4 Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда $\Delta f = A\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$.

Определение
Линейная функция $A\Delta x$ называется **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0.
Обозначение: $df(x_0)$

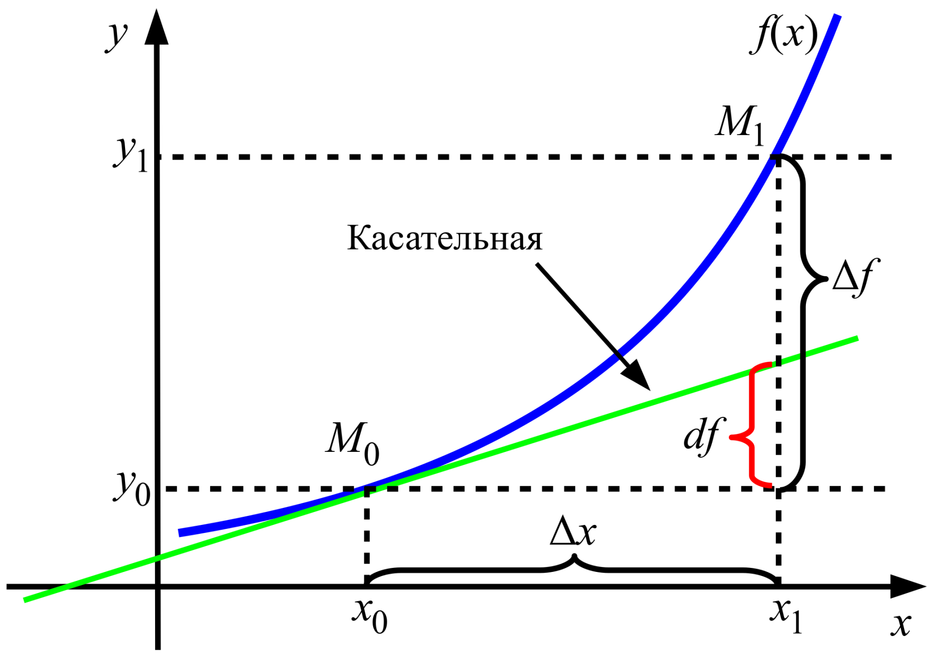
Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.}$$

Пример:
$f(x) = x^3, x_0 = 1,$
$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3 \Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$

5 Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение функции, то df - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении аргумента на Δx (см. рисунок).



Поскольку
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f - df}{df} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\circ(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = \dfrac{1}{f'(x_0)}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\circ(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$
то, чем меньше приращение аргумента Δx, тем ближе значение дифференциала к значению приращения функции.

6 Инвариантность формы дифференциала

$f(x) = v(u(x))$ - сложная функция,
u - промежуточная переменная,
x - независимая переменная,
$u_0 = u(x_0)$

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)u'(x_0)dx = v'(u_0)du$$

Дифференциал df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной u) он считается.